Primeira Lista de Exercícios Álgebra Linear
Professora: Grazielle Feliciani Barbosa 16/10/2023.

1. Considere o conjunto $V = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$. Dados (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, defina as seguintes operações:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \quad \text{e} \quad \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

$(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

2. Considere o conjunto $V = \{ (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$. Mostre que $(V, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ em relação a cada uma das seguintes operações $+$ e $\cdot$ dadas por:
(a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$.
(b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ e $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.
(c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 - y_1, x_2 + y_2)$ e $\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2)$.

3. Discuta se $\mathbb{R}^2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

4. Quais dos seguintes conjuntos W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$? Justifique sua resposta.
(a) $W = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in \mathbb{Z} \}$.
(b) $W = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0 \}$.
(c) $W = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \text{ é irracional} \}$.

5. Quais dos seguintes conjuntos de função são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$? Justifique sua resposta.
(a) Todas as funções f tais que $f(x^2) = f(x)^2$.
(b) Todas as funções f tais que $f(0) = f(1)$.
(c) Todas as funções f tais que $f(-3) = 2 + f(1)$.
(d) $W = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \}$.
(e) $W = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 2f(5) \}$.

6. Seja V o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de ordem n. Qual dos seguintes conjuntos de matrizes em V são subespaços vetoriais de V? Justifique sua resposta.
(a) Todas as matrizes A invertíveis.
(b) Todas as matrizes A não invertíveis.
(c) Todas as matrizes A de V tais que $AB = BA$, onde $B \in V$ é uma matriz fixada.
(d) Todas as matrizes A de V tais que $A^2 = A$.
(e) Todas as matrizes A diagonais.
(f) Todas as matrizes A tais que $\det(A) = 0$.

7. Defina $V_p = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função par} \}$ e $V_i = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função ímpar} \}$.
(a) Mostre que V_p e V_i são subespaços vetorias de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
(b) Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = V_p \oplus V_i$.

8. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Considere o conjunto $U \times V$. Dados (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in U \times V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, defina as seguintes operações:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \text{ e } \lambda \cdot (u_1, v_1) = (\lambda u_1, \lambda v_1).$$

Mostre que $(U \times V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

9. Os polinômios $p_1(x) = 5 + 9x + 5x^2$ e $p_2(x) = 2 + 6x^2$ estão no subespaço gerado pelos polinômios $2 + x + 4x^2$, $1 - x + 3x^2$, $3 + 2x + 5x^2$? Justifique sua resposta.

10. Sejam $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \}$, $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \}$ e $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$.
(a) Mostre que U, V e W são subespaços de $\mathbb{R}^3$.
(b) Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $W + V = \mathbb{R}^3$. Em algum caso a soma é direta? Justique sua resposta.

11. (a) Mostre que o subconjunto de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que o subconjunto de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes simétricas é um subespaço vetorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(c) Mostre que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é soma direta dos subespaços das matrizes simétricas e anti-simétricas.

12. Mostrar que os conjuntos $\{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t\}$ e $\{1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\}$ geram o mesmo subespaço vetorial de $C(\mathbb{R})$.

13. (a) Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
(b) Mostre que os números complexos $2+3i$ e $1-2i$ geram o espaço vetorial $\mathbb{C}$.

14. Verificar se as seguintes matrizes geram o espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Mostre que os polinômios 1, $1-x$, $(1-x)^2$, $(1-x)^3$ geram $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

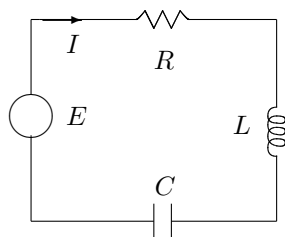
16. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$: $(-1,0,1)$ e $(3,4,-2)$. Determine um sistema de equações lineares homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o subespaço gerado por esses vetores.

17. Determine os geradores para cada um dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
(a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$.
(b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$.
(c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.
(d) $U \cap V$.
(e) $V + W$.

18. Consideremos uma mola (que supomos sem massa) suspensa verticalmente tendo sua extremidade superior presa num suporte rígido. Fixamos um corpo de massa m na outra extremidade da mola. Suponha que este corpo seja deslocado verticalmente a partir da sua posição de equilíbrio e, em seguida, liberado. O movimento y deste corpo, a partir da posição de equilíbrio, é dado por uma função da forma:

$$y(t) = \lambda_1 \cos \omega t + \lambda_2 \operatorname{sen} \omega t, \quad (\star)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ é uma constante que depende da mola e da massa do corpo. Mostre que para um $\omega \in \mathbb{R}$ fixo, o conjunto de todas as funções descritas em $(\star)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

19. Dado o circuito

onde R é a resistência, I é a corrente, L é a indutância, E é a força eletromotriz e C é a capacitância, sabe-se que a queda de potencial através da capacitância C é Q/C, onde Q é a carga no capacitor. Aplicando a Lei de Kirchhoff (a queda total de potencial no circuito deve ser contrabalanceada pela força eletromotriz aplicada) e sabendo que $I = \dfrac{dQ}{dt}$, pode ser mostrado que a corrente num instante t qualquer é dada pela equação diferencial:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E. \quad (\star)$$

(a) O conjunto das funções que satisfazem a equação diferencial $(\star)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.
(b) O conjunto das funções que satisfazem a equação diferencial $L\dfrac{d^2Q}{dt^2} + R\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{C}Q = 0$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Justifique sua resposta.